УДК 519.7

Т.В. СОПОВА, О.В. ЧЕРНОВА

A.P. SOLDATOV, O.V. CHERNOVA

**О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

**ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

**ON THE SOLVABILITY OF A BOUNDARY PROBLEM**

**FOR A FIRST ORDER SYSTEM**

*В данной статье авторы рассматривают на плоскости краевую задачу для системы первого порядка эллиптического типа. Применяя результаты классической теории сингулярных уравнений удаётся редуцировать поставленную задачу к системе сингулярных интегральных уравнений, разрешая которую установлена фредгольмовость поставленной задачи в определенном классе и найдена формулу для её индекса.*

*Ключевые слова: интегральный оператор типа Коши, краевая задача, сингулярный оператор Коши, фредгольмов оператор, эллиптические системы.*

*In this article, the authors consider a boundary value problem on the plane for a first-order system of elliptic type. Applying the results of the classical theory of singular equations, it is possible to reduce the posed problem to a system of singular integral equations, solving which the Fredholm property of the posed problem in a certain class is established and a formula for its index is found.*

*Keywords: integral operator of Cauchy type, boundary value problem, singular Cauchy operator, Fredholm operator, elliptic systems.*

Решение многих прикладных задач сводится к решению краевых задач для эллиптических систем первого порядка. Впервые метод сведения краевой задачи для эллиптической системы к системе сингулярных интегральных уравнений впервые был изложен в работе В.Г. Мазья [2]. А уже в конце прошлого века в работе Я.Б. Лопатинского [3] были рассмотрены краевые задачи для эллиптических систем в двумерной области с угловой точкой. Много интересных результатов по краевым задачам для общих эллиптических систем с постоянными коэффициентами было получено в работах А. П. Солдатова. Так в статье [6] для пространств с весом для областей с кусочно-гладкой границей была изучена краевая задача для эллиптических систем с постоянными матричными коэффициентами, которая охватывает широкий круг локальных и нелокальных краевых задач и предложен метод эквивалентной редукции этой задачи к системе граничных уравнений. Проблема постановки фредгольмовых краевых задач для общих эллиптических систем по-прежнему занимает важное место в современной теории эллиптических краевых задач.

Введем в рассмотрение класс где дифференциальный оператор обозначен для удобства через И пусть область комплексной плоскости ограничена гладким контуром производная параметризации гладкой кривой принадлежит классу Подробное описание классов можно найти в работе [4]. В этой области для системы вида

поставим задачу: найти такое её решение из класса , которое бы удовлетворяло следующему краевому условию

Здесь через обозначена матрица–функция из класса [4], определитель которой всюду отличен от нуля. Все дальнейшие рассмотрения проводятся с учетом того, что система (1) есть система эллиптического типа [8] и собственные значения постоянной матрицы лежат в верхней полуплоскости.

**Лемма 1.** *Задача (1) – (2) в классе эквивалентным образом редуцируется к следующей системе сингулярных интегральных уравнений*

где и интегральный и сингулярный операторы типа Коши соответственно с вещественной функцией [1], а – интегральный оператор по области определенный для комплексных – вектор-функций [4].

Используя оценку [1]

где постоянная зависит только от и , а есть интегральный оператор вида

мы можем записать систему (3) в терминах классического сингулярного оператора Коши

Как известно из [4] оператор , определяемый правой частью (5), где функции и ограничен и, значит, компактен в . Обозначим класс таких операторов через .

**Лемма 2.** *Пусть контур .Тогда операторы и принадлежат классу*

Далее перейдем к системе (3), которую запишем в следующей операторной форме:

В силу того, что функция вещественна, , для оператора получим выражение Операторы и функции здесь определяются равенствами

Оператор системы (7) действует , где нижний индекс указывает на то, что элементы соответствующего пространства являются вещественными вектор-функциями. Вводя следующие операторные матрицы

запишем систему можно записать в краткой форме . Оператор здесь естественным образом [5] продолжается на комплексные вектор-функции по правилу

,

а значит оператор данной системы можно рассматривать в пространствах комплексных векторов, при этом его свойство фредгольмовости и индекс останутся неизменными (если размерности понимать над соответствующими полями и ).

Убедимся, что что оператор фредгольмов в пространстве комплексных вектор-функций. Операторы и компактны, соответственно, в пространствах и [4]. На основании леммы 2 можем записать

,

где операторы . Таким образом, с точностью до компактного слагаемого оператор совпадает с

Фигурирующую здесь матрицу можно представить в виде произведения

Согласно классической теории сингулярных уравнений [4]оператор, определяемый первым сомножителем фредгольмов и его индексравен . Что касается оператора, отвечающего второмусомножителю, то он, очевидно, обратим.

Таким образом, на основании известных свойств [7]фредгольмовых операторов оператор фредгольмов и его индекс равен. Используя оценку (4) и леммы 1,2, основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Задача (1) – (2) фредгольмова в классе и ее индекс дается формулой*

*где приращение непрерывной ветви аргумента берется в направлении, оставляющем область слева.*

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ващенко О.В. Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера // Материалы III Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус. 2005. – С.11-14.
2. Лопатинский Я.Б. Теория общих граничных задач / Я. Б. Лопатинский. – К: Наукова думка, 1984. – 316 с.
3. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // Анализ – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНИТИ, М. – 1988. – С. 131-228.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд., – М., Наука, 1968. – 639 с.
5. Солдатов А.П. Метод теоpии функций в кpаевых задачах на плоскости I. Гладкий случай // Изв. АH СССР" (сеp.матем.) 1991. – T.55, № 5. – C.1070-1100.
6. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка на полуплоскости // Изв. РАН. Сер. матем – 2006. Т. 70, № 6. – С. 161-192.
7. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. – М.: Мир, 1970. – 321 с.
8. Чернова О.В. Фредгольмова разрешимость задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами // Динамические системы. – 2018. – Т. 8(36), №4. – С. 357-371.

**Сопова Татьяна Владимировна**  
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород  
магистрант второго года обучения кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования  
Тел.: +7(4722) 30-13-00\*4267  
E-mail: 1318340@bsu.edu.ru

**Чернова Ольга Викторовна**  
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород  
К.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования  
Тел.: +7(4722) 30-13-00\*4267  
E-mail: Chernova\_Olga@ bsu.edu.ru